Technische Universität Clausthal
Institut für Mathematik
Dr. Thomas Maxsein

Mathemathische Meth. der Informatik
WS 1998/99
Musterklausur

1. Zeigen Sie: Für natürliche Zahlen n gilt:

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{\varphi|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

   Es ist $\varphi(n) = |\{1 \leq d \leq n : (d,n) = 1\}|$, $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$ für $(a,b) = 1$,$\varphi(1) = 1$, und es gilt $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ für Primzahlen p und natürliche Zahlen α .

2. Berechnen Sie die beiden letzten Ziffern in der Dezimaldarstellung der Zahl 321^{1999} .

3. Auf R$\backslash\{0\}$ sei eine Relation „$\sim$“ erklärt durch $x \sim y \Leftrightarrow \frac{x}{y} \in$ Q.

   (a) Zeigen Sie, daß „$\sim$“ eine Äquivalenzrelation auf R$\backslash\{0\}$ ist.

   (b) Bestimmen Sie die Äquivalenzklassen $K(y) = \{x \in \text{R}\backslash\{0\} : x \sim y\}$ für $y = 1$ und $y = \sqrt{2}$.

4. Sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring mit Einselement e . Auf R seien zwei weitere Verknüpfungen $\oplus, \otimes$ erklärt durch

$$a \oplus b = a + b - e, a \otimes b = a + b - a \cdot b$$

   Zeigen Sie, daß $(R, \oplus, \otimes)$ ein zu $(R, +, \cdot)$ isomorpher Ring ist.

5. Es seien $a, b, c \in R \setminus \{0\}$ gegeben. Man betrachte

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in R^3 : \frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} \right\}$$

   (a) Zeigen Sie, daß V ein Untervektorraum des R^3 ist.

   (b) Bestimmen Sie (mit Beweis) die Dimension von V und eine Basis.

6. Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f : V \to W$ ein Isomorphismus. Zeigen Sie, daß die inverse Abbildung $f^{-1} : W \to V$ ebenfalls ein Isomorphismus ist.